Exámenes de Selectividad

Física. Madrid 2020, Extraordinaria

mentoor.es

Pregunta 1. Opción A. Campo Gravitatorio

Calisto (el tercer satélite con mayor masa del sistema solar), que posee una densidad de $1,83\,\mathrm{g\ cm^{-3}}$ y un radio de 2410 km, da una revolución alrededor del planeta Júpiter cada 16,89 días.

a) **Calcule la masa del satélite y la aceleración de la gravedad en su superficie.**
b) **Obtenga la energía cinética y la energía mecánica de Calisto en su órbita circular alrededor del planeta.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N $\mathrm{m^2kg^{-2}}$; Masa de Júpiter, $M_{\mathrm{Jup}} = 1,90 \cdot 10^{27}$ kg.

Solución:

a) **Calcule la masa del satélite y la aceleración de la gravedad en su superficie.**

La masa (m_c) de Calisto se determina utilizando la fórmula de la densidad:

$$\rho = \frac{m_c}{V} \quad \Rightarrow \quad m_c = \rho \cdot V,$$

donde:
- $\rho = 1{,}83\,\mathrm{g/cm^3} = 1{,}83 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$,
- V es el volumen de Calisto, que para una esfera se calcula como:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

con $R = 2410\,\mathrm{km} = 2{,}410 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

Calculando el volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi(2{,}410 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^3 = 5{,}85 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^3}.$$

Entonces, la masa es:

$$m_c = 1{,}83 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 5{,}85 \cdot 10^{19}\,\mathrm{m^3} = 1{,}07 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}.$$

La aceleración gravitatoria (g) en la superficie de Calisto se calcula mediante la fórmula:

$$g = \frac{Gm_c}{R^2},$$

donde:
- $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\ m^2kg^{-2}}$,
- $m_c = 1{,}07 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$,
- $R = 2{,}410 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

Sustituyendo los valores:

$$g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}07 \cdot 10^{23}}{(2{,}410 \cdot 10^6)^2} = 1{,}23\,\mathrm{m/s^2}.$$

Por lo tanto, la masa de Calisto es $1{,}07 \cdot 10^{23}$ kg y la aceleración gravitatoria en su superficie es $1{,}23\,\mathrm{m/s^2}$.

b) **Obtenga la energía cinética y la energía mecánica de Calisto en su órbita circular alrededor del planeta.**

La velocidad orbital se obtiene a partir de la fuerza centrípeta que iguala a la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m_c v^2}{r_t} = \frac{GM_{\mathrm{Jup}} m_c}{r_t^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_{\mathrm{Jup}}}{r_t}},$$

donde r_t es la distancia total desde el centro de Júpiter a Calisto. Primero, calculamos r_t. Sabemos que la revolución completa de Calisto alrededor de Júpiter toma $T = 16{,}89\,\text{días}$. Convertimos este tiempo a segundos:

$$T = 16{,}89\,\text{días} \cdot 24\,\text{h/día} \cdot 3600\,\text{s/h} = 1{,}459{,}296 \cdot 10^5\,\text{s}.$$

Utilizamos la tercera Ley de Kepler adaptada para órbitas circulares:

$$r_t = \left(\frac{GM_{\text{Jup}}T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}.$$

Sustituyendo los valores:

$$r_t = \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}90 \cdot 10^{27} \cdot (1{,}459{,}296 \cdot 10^5)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 1{,}90 \cdot 10^9\,\text{m}.$$

Ahora, calculamos la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}90 \cdot 10^{27}}{1{,}90 \cdot 10^9}} = 8167\,\text{m/s}.$$

La energía cinética se calcula como:

$$E_c = \frac{1}{2}m_c v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}07 \cdot 10^{23}\,\text{kg} \cdot (8167\,\text{m/s})^2 = 3{,}58 \cdot 10^{30}\,\text{J}.$$

La energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial gravitatoria. Para órbitas circulares, se puede expresar directamente como:

$$E_m = -\frac{1}{2}\frac{GM_{\text{Jup}}m_c}{r_t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}90 \cdot 10^{27} \cdot 1{,}07 \cdot 10^{23}}{1{,}90 \cdot 10^9} = -3{,}58 \cdot 10^{30}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, la energía cinética de Calisto es $\mathbf{3{,}58 \cdot 10^{30}}$ J y la energía mecánica es $\mathbf{-3{,}58 \cdot 10^{30}}$ J.

Pregunta 2. Opción A. Ondas

Un violín emite ondas sonoras con una potencia de $5 \cdot 10^{-3}$ W cuando se toca la nota Fa de 698 Hz.

a) **Indique razonadamente si la onda es longitudinal o transversal y obtenga su longitud de onda.**

b) **Calcule el nivel de intensidad sonora que percibe un oyente situado a 20 m generado por 15 violines de una orquesta tocando al unísono.**

Datos: Intensidad umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}; Velocidad del sonido en el aire, $v_s = 340$ m s^{-1}.

Solución:

a) **Indique razonadamente si la onda es longitudinal o transversal y obtenga su longitud de onda.**

Las ondas sonoras son perturbaciones que se propagan a través de un medio elástico debido a la vibración de sus partículas. Estas ondas pueden ser de dos tipos:

– Longitudinales: Las partículas del medio vibran en la misma dirección en que avanza la onda.

– Transversales: Las partículas vibran perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.

En el caso del sonido en el aire, las ondas son *longitudinales* ya que las moléculas del aire vibran hacia adelante y hacia atrás en la dirección de propagación del sonido. Para calcular la longitud de onda (λ) utilizamos la fórmula:

$$\lambda = \frac{v_s}{f},$$

donde:
– $v_s = 340\,\mathrm{m/s}$ es la velocidad del sonido en el aire,
– $f = 698\,\mathrm{Hz}$ es la frecuencia de la nota Fa emitida por el violín.
Sustituyendo los valores:

$$\lambda = \frac{340\,\mathrm{m/s}}{698\,\mathrm{Hz}} = 0{,}487\,\mathrm{m}.$$

Por lo tanto, la onda sonora es longitudinal y su longitud de onda es aproximadamente 0,487 metros.

b) **Calcule el nivel de intensidad sonora que percibe un oyente situado a 20 m generado por 15 violines de una orquesta tocando al unísono.**

Primero, calculamos la potencia total emitida por los 15 violines:

$$P_{\text{total}} = 15 \cdot P_{\text{violín}} = 15 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W} = 7{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W}.$$

La intensidad sonora (I) a una distancia (r) de la fuente se calcula mediante la fórmula:

$$I = \frac{P_{\text{total}}}{S},$$

donde S es el área de la superficie esférica a una distancia r:

$$S = 4\pi r^2.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$S = 4\pi(20\,\mathrm{m})^2 = 4\pi(400\,\mathrm{m}^2) = 5026{,}55\,\mathrm{m}^2,$$

$$I = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{W}}{5026{,}55\,\mathrm{m}^2} = 1{,}49 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W/m}^2.$$

El nivel de intensidad sonora (β) se mide en decibelios (dB) y se calcula con:

$$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W/m}^2$ es la intensidad umbral de audición. Sustituyendo los valores:

$$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{1{,}49 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 71{,}74\,\mathrm{dB}.$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad sonora percibido por el oyente es aproximadamente 71,74 decibelios (dB).

Pregunta 3. Opción A. Campo Electromagnético

Dos cargas eléctricas puntuales A y B de valores $q_A = +5$ nC y $q_B = -5$ nC, están situadas en el plano xy en las posiciones $(-4, 0)$ cm y $(4, 0)$ cm, respectivamente. Determine el potencial eléctrico y el campo eléctrico creado por esta distribución de cargas en:

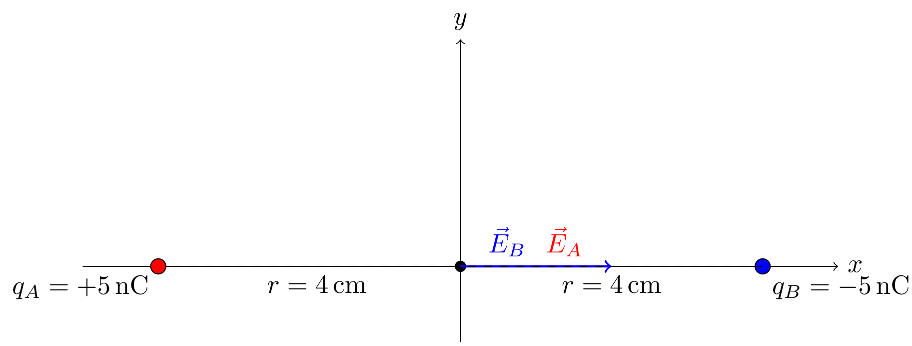
a) **El origen de coordenadas.**
b) **El punto del plano $(0, 3)$ cm.**

Dato: Constante de la ley de Coulomb, $K = 9 \cdot 10^9$ N m^{2}C^{-2}.

Solución:

a) **El origen de coordenadas.**

Las cargas q_A y q_B están situadas simétricamente respecto al origen. Utilizaremos el principio de superposición para calcular el campo eléctrico total y el potencial eléctrico en el origen:



El campo eléctrico generado por una carga puntual está dado por:

$$\vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r,$$

donde:
- $K = 9 \cdot 10^9$ N m^{2}C^{-2} es la constante de Coulomb,
- Q es la carga,
- r es la distancia entre la carga y el punto de interés,
- $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección del campo.

Calculamos el campo eléctrico debido a cada carga en el origen:

$$\vec{E}_A = K\frac{q_A}{r_A^2}\vec{u}_A = 9 \cdot 10^9\,\frac{5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(0{,}04\,\mathrm{m})^2}\vec{i} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{0{,}0016}\vec{i} = 28{,}125 \cdot 10^3\,\vec{i}\,\mathrm{N/C},$$

$$\vec{E}_B = K\frac{q_B}{r_B^2}\vec{u}_B = 9 \cdot 10^9\,\frac{-5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(0{,}04\,\mathrm{m})^2}(-\vec{i}) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-5) \cdot 10^{-9}}{0{,}0016}(-\vec{i}) = 28{,}125 \cdot 10^3\,\vec{i}\,\mathrm{N/C}.$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = 28{,}125 \cdot 10^3\,\vec{i}\,\mathrm{N/C} + 28{,}125 \cdot 10^3\,\vec{i}\,\mathrm{N/C} = 5{,}625 \cdot 10^4\,\vec{i}\,\mathrm{N/C}.$$

El potencial eléctrico debido a una carga puntual está dado por:

$$V = K\frac{Q}{r}.$$

Calculamos el potencial debido a cada carga en el origen:

$$V_A = K\frac{q_A}{r_A} = 9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{0{,}04\,\mathrm{m}} = \frac{9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-9}}{0{,}04} = 1125\,\mathrm{V},$$

$$V_B = K\frac{q_B}{r_B} = 9\cdot 10^9\,\frac{-5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{0{,}04\,\mathrm{m}} = \frac{9\cdot 10^9\cdot (-5)\cdot 10^{-9}}{0{,}04} = -1125\,\mathrm{V}.$$

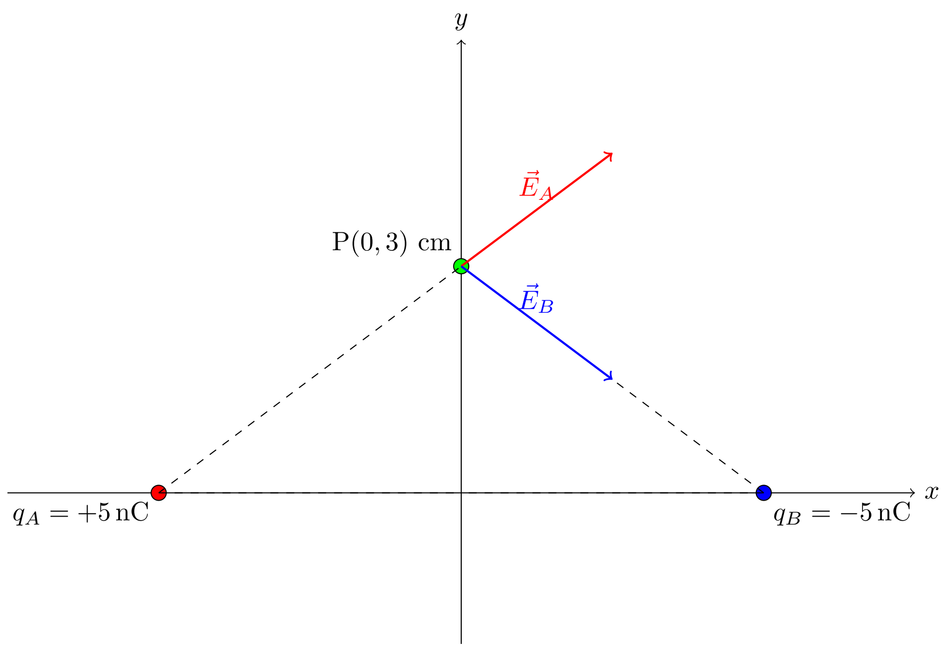
Aplicando el principio de superposición:

$$V_{\text{total}} = V_A + V_B = 1125\,\mathrm{V} + (-1125\,\mathrm{V}) = 0\,\mathrm{V}.$$

Por lo tanto, en el origen de coordenadas, el campo eléctrico total es $\vec{E}_{\text{total}} = 5{,}625\cdot 10^4\,\vec{i}\,\mathrm{N/C}$ y el potencial eléctrico es $V_{\text{total}} = 0\,\mathrm{V}$.

b) El punto del plano $(0, 3)$ cm.

En este caso, el punto de interés no está en la línea que une a las cargas, por lo que debemos considerar las componentes vectoriales del campo eléctrico:



Hallamos la distancia desde las cargas hasta el punto P:

$$r_A = r_B = \sqrt{(4\cdot 10^{-2})^2 + (3\cdot 10^{-2})^2} = 0{,}05\,\mathrm{m}.$$

Para caluclar el valor del campo eléctrico, aplicamos la Ley de Coulomb para cada carga:

$$E_A = K\frac{|q_A|}{r_A^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(0{,}05\,\mathrm{m})^2} = 18000\,\mathrm{N/C},$$

$$E_B = K\frac{|q_B|}{r_B^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(0{,}05\,\mathrm{m})^2} = 18000\,\mathrm{N/C}.$$

Dado que las direcciones de los campos son diferentes, debemos considerar sus componentes vectoriales.

$$\vec{E}_A = 18000\,\mathrm{N/C}\cdot\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right) = 14400\,\vec{i} + 10800\,\vec{j}\ \mathrm{N/C},$$

$$\vec{E}_B = 18000\,\mathrm{N/C}\cdot\left(\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}\right) = 14400\,\vec{i} - 10800\,\vec{j}\ \mathrm{N/C}.$$

Aplicando el principio de superposición:

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = (14400 + 14400)\,\vec{i} + (10800 - 10800)\,\vec{j} = 2,88\cdot 10^4\,\vec{i}\ \mathrm{N/C}.$$

Finalmente, calculamos el potencial eléctrico en P:

$$V = V_A + V_B = K\frac{q_A}{r_A} + K\frac{q_B}{r_B} = 9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-9}}{0{,}05} + 9\cdot 10^9\,\frac{-5\cdot 10^{-9}}{0{,}05} = 900\,\mathrm{V} - 900\,\mathrm{V} = 0\,\mathrm{V}.$$

Por lo tanto, en (0, 3) m, el campo eléctrico total es $\vec{E}_{\text{total}} = 2{,}88\cdot 10^4\,\vec{i}$ N/C $\vec{i}$ y el potencial eléctrico es $V_{\text{total}} = 0\,\mathrm{V}$.

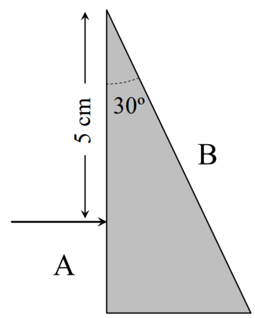
Pregunta 4. Opción A. Ondas

Sobre la cara A de un prisma de material transparente incide perpendicularmente desde el aire un rayo de luz a una distancia de 5 cm desde el vértice superior, cuyo ángulo es de 30º (ver figura).

a) **Calcule el tiempo que tarda el rayo en alcanzar la cara B, y el ángulo de emergencia al aire a través de dicha cara, si el material es un vidrio con un índice de refracción de 1,5.**

b) **¿Emergerá el rayo por la cara B si el prisma es de diamante, cuyo índice de refracción es de 2,5? Razone la respuesta.**

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; Índice de refracción del aire, $n_{\text{aire}} = 1$.



Solución:

a) **Calcule el tiempo que tarda el rayo en alcanzar la cara B, y el ángulo de emergencia al aire a través de dicha cara, si el material es un vidrio con un índice de refracción de 1,5.**

El rayo incide a 30° respecto a la normal y recorre una distancia horizontal de 5 cm hasta alcanzar la cara B. Utilizamos la tangente del ángulo para calcular la distancia vertical x dentro del prisma:

$$\tan(30°) = \frac{x}{5\,\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad x = \tan(30°) \cdot 5\,\text{cm} = 2{,}887\,\text{cm}.$$

La velocidad de la luz dentro del vidrio (v) se relaciona con la velocidad en el vacío (c) mediante el índice de refracción (n):

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}5} = 2 \cdot 10^8\,\text{m/s}.$$

La distancia recorrida (D) por el rayo es $2{,}887\,\text{cm} = 2{,}887 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$. Por lo tanto, el tiempo (t) es:

$$t = \frac{D}{v} = \frac{2{,}887 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}{2 \cdot 10^8\,\text{m/s}} = 1{,}4435 \cdot 10^{-10}\,\text{s}.$$

Aplicamos la Ley de Snell-Descartes en la interfaz vidrio-aire:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \sin(\alpha) = n_{\text{aire}} \cdot \sin(\theta_{\text{emergencia}}).$$

Dado que el rayo emerge al aire, $\theta_{\text{emergencia}}$ es el ángulo que forma con la normal:

$$\sin(\theta_{\text{emergencia}}) = n_{\text{vidrio}} \cdot \sin(\alpha).$$

Sabemos que $\alpha = 30°$, entonces:

$$\sin(\theta_{\text{emergencia}}) = 1{,}5 \cdot \sin(30°) = 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75.$$

Así,

$$\theta_{\text{emergencia}} = \arcsin(0{,}75) = 48{,}59^\circ.$$

Por lo tanto, el tiempo que tarda el rayo en alcanzar la cara B es $\mathbf{1{,}44 \cdot 10^{-10}}$ s y el ángulo de emergencia es de 48,59°.

b) ¿Emergerá el rayo por la cara B si el prisma es de diamante, cuyo índice de refracción es de 2,5? Razone la respuesta.

Ahora, consideramos que el prisma está hecho de diamante con un índice de refracción de $n_{\text{diamante}} = 2{,}5$. Usamos la Ley de Snell:

$$n_{\text{diamante}} \cdot \sin(30^\circ) = n_{\text{aire}} \cdot \sin(\phi).$$

Sustituyendo los valores:

$$2{,}5 \cdot \sin(30^\circ) = 1 \cdot \sin(\phi) \quad \Rightarrow \quad \sin(\phi) = 2{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}25.$$

Dado que $\sin(\phi) = 1{,}25 > 1$, no existe un ángulo real ϕ que satisfaga esta ecuación. Entonces, se produce una *reflexión total interna*, lo que significa que el rayo no puede emerger por la cara B del prisma y se refleja completamente dentro del diamante.

Por lo tanto, el rayo no emergerá por la cara B del prisma de diamante debido a que se produce una reflexión total interna.

Pregunta 5. Opción A. Física Moderna

Para obtener imágenes del corazón se utiliza el isótopo ^{201}Tl del talio, que emite rayos gamma tras su desintegración, con un período de semidesintegración de 3,04 días. Para una correcta visualización de los tejidos cardíacos se recomienda inyectar una dosis de $0,9\,\text{MBq kg}^{-1}$.

a) **Obtenga la constante de desintegración radiactiva del isótopo. Determine la cantidad de ^{201}Tl, expresada en gramos, recomendada para diagnosticar a un paciente de 75 kg.**
b) **Calcule el tiempo necesario para que el nivel de actividad se reduzca a un 1% respecto a la actividad inicial.**

Datos: Número de Avogadro, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$; Masa atómica del ^{201}Tl, $M_A = 201\,\text{u}$.

Solución:

a) **Obtenga la constante de desintegración radiactiva del isótopo. Determine la cantidad de ^{201}Tl, expresada en gramos, recomendada para diagnosticar a un paciente de 75 kg.**

La constante de desintegración radiactiva (λ) está relacionada con el período de semidesintegración ($T_{1/2}$) mediante la fórmula:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Dado que $T_{1/2} = 3{,}04$ días, primero convertimos este tiempo a segundos:

$$T_{1/2} = 3{,}04\,\text{días} \cdot 24\,\frac{\text{horas}}{\text{día}} \cdot 3600\,\frac{\text{segundos}}{\text{hora}} = 262656\,\text{segundos}.$$

Luego, calculamos λ:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{262656\,\text{s}} = \frac{0{,}6931}{262656} = 2{,}64 \cdot 10^{-6}\,\text{s}^{-1}.$$

Ahora, para determinar la cantidad de ^{201}Tl recomendada para un paciente de 75 kg, utilizamos la fórmula de la actividad inicial (A_0):

$$A_0 = \lambda N_0,$$

donde N_0 es el número inicial de núcleos radiactivos. Primero, necesitamos encontrar N_0 a partir de la masa dada.

Convertimos la masa de ^{201}Tl a moles:

$$n = \frac{m}{M_A} = \frac{0{,}2\,\text{mg}}{201\,\text{g/mol}} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{g}}{201\,\text{g/mol}} = 9{,}95 \cdot 10^{-7}\,\text{mol}.$$

Luego, calculamos N_0 utilizando el número de Avogadro:

$$N_0 = n \cdot N_A = (9{,}95 \cdot 10^{-7}\,\text{mol}) \cdot (6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}) = 5{,}99 \cdot 10^{17}\,\text{núcleos}.$$

Ahora, determinamos la actividad inicial:

$$A_0 = \lambda N_0 = (2{,}64 \cdot 10^{-6}\,\text{s}^{-1}) \cdot (5{,}99 \cdot 10^{17}) = 1{,}58 \cdot 10^{15}\,\text{Bq}.$$

Sin embargo, dado que se recomienda una dosis de 0,9 MBq kg^{-1} para un paciente de 75 kg, la actividad total recomendada es:

$$A_{\text{total}} = 0{,}9\,\text{MBq kg}^{-1} \cdot 75\,\text{kg} = 67{,}5\,\text{MBq}.$$

Para encontrar la cantidad de ^{201}Tl necesaria, usamos la relación:

$$A_{\text{total}} = \lambda N,$$

donde N es el número de núcleos necesarios para alcanzar la actividad recomendada:

$$N = \frac{A_{\text{total}}}{\lambda} = \frac{67{,}5 \cdot 10^6\,\text{Bq}}{2{,}64 \cdot 10^{-6}\,\text{s}^{-1}} = 2{,}56 \cdot 10^{13}\,\text{núcleos}.$$

Convertimos N a gramos:

$$m = \frac{N \cdot M_A}{N_A} = \frac{(2{,}56 \cdot 10^{10}\,\text{núcleos}) \cdot 201\,\text{g/mol}}{6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}} = 8{,}55 \cdot 10^{-9}\,\text{g}.$$

Por lo tanto, la constante de desintegración radiactiva del ^{201}Tl es $\boldsymbol{\lambda = 2{,}64 \cdot 10^{-6}\,\text{s}^{-1}}$ y la cantidad recomendada de ^{201}Tl para un paciente de 75 kg es $\boldsymbol{8{,}55 \cdot 10^{-9}}$ gramos.

b) Calcule el tiempo necesario para que el nivel de actividad se reduzca a un 1% respecto a la actividad inicial.

Sabemos que la actividad en función del tiempo está dada por:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Queremos que la actividad final $A(t)$ sea el 1% de la actividad inicial A_0:

$$A(t) = 0{,}01\,A_0.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$0{,}01\,A_0 = A_0 e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad 0{,}01 = e^{-\lambda t}.$$

Aplicando el logaritmo natural a ambos lados:

$$\ln(0{,}01) = -\lambda t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{\ln(0{,}01)}{\lambda}.$$

Calculamos el tiempo t:

$$t = -\frac{\ln(0{,}01)}{2{,}64 \cdot 10^{-6}\,\text{s}^{-1}} = 1{,}745 \cdot 10^6\,\text{s}.$$

Convertimos el tiempo a días:

$$t = \frac{1{,}745 \cdot 10^6\,\text{s}}{86400\,\frac{\text{s}}{\text{día}}} = 20{,}2\,\text{días}.$$

Por lo tanto, se requieren aproximadamente 20,2 días para que la actividad del ^{201}Tl se reduzca al 1% de su valor inicial.

Pregunta 1. Opción B. Campo Gravitatorio

La sonda espacial Mars Reconnaissance Orbiter consiguió en septiembre de 2006 situarse en una órbita circular en torno al planeta Marte a 290 km de altura sobre la superficie para realizar un mapeo de su superficie. Tras utilizar combustible en la maniobra de aproximación, la sonda actualmente tiene una masa de 1031 kg.

a) **Halle el periodo de revolución de la sonda espacial y su velocidad orbital alrededor de Marte.**
b) **Obtenga la energía mínima necesaria que habría que suministrar al satélite para que escape del campo gravitatorio marciano.**

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2}; Masa de Marte, $M_{\text{Marte}} = 6,42 \cdot 10^{23}$ kg; Radio de Marte, $R_{\text{Marte}} = 3,39 \cdot 10^6$ m.

Solución:

a) **Halle el periodo de revolución de la sonda espacial y su velocidad orbital alrededor de Marte.**

El periodo de revolución (T) de una sonda en órbita circular está relacionado con la frecuencia angular (ω) mediante la relación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Para determinar ω, igualamos la fuerza centrípeta necesaria para mantener la órbita con la fuerza gravitatoria que actúa sobre la sonda:

$$F_{\text{centrípeta}} = F_{\text{gravitatoria}}.$$

Expresando ambas fuerzas:

$$m_s \omega^2 r = \frac{G M_{\text{Marte}} m_s}{r^2}.$$

Simplificando y resolviendo para ω:

$$\omega^2 = \frac{G M_{\text{Marte}}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{G M_{\text{Marte}}}{r^3}},$$

donde r es la distancia desde el centro de Marte hasta la sonda. Dado que la sonda está a una altura de 290 km sobre la superficie, la distancia total es:

$$r = R_{\text{Marte}} + h = 3{,}39 \cdot 10^6\,\text{m} + 290 \cdot 10^3\,\text{m} = 3{,}68 \cdot 10^6\,\text{m}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\omega = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}\,\text{kg}}{(3{,}68 \cdot 10^6\,\text{m})^3}} = 9{,}27 \cdot 10^{-4}\,\text{rad/s}.$$

Ahora, calculamos el periodo de revolución:

$$T = \frac{2\pi}{9{,}27 \cdot 10^{-4}\,\text{rad/s}} = 6778{,}3\,\text{s}.$$

Para obtener la velocidad orbital (v), utilizamos la relación entre ω y v:

$$v = \omega r = 9{,}27 \cdot 10^{-4}\,\text{rad/s} \cdot 3{,}68 \cdot 10^6\,\text{m} = 3411{,}2\,\text{m/s}.$$

Por lo tanto, el periodo de revolución de la sonda es 6778,3 s (alrededor de 1,89 horas) y su velocidad orbital es 3411,2 m/s.

b) Obtenga la energía mínima necesaria que habría que suministrar al satélite para que escape del campo gravitatorio marciano.

La energía mínima requerida para que una sonda escape del campo gravitatorio de un planeta es igual a la energía mecánica total necesaria para superar la energía potencial gravitatoria (pero de signo contrario). Esta energía se puede calcular utilizando la fórmula de la energía mecánica (E_M) para una órbita:

$$E_M = -\frac{1}{2}\frac{GM_{\text{Marte}}m_s}{r},$$

donde m_s es la masa de la sonda y r es la distancia desde el centro de Marte hasta la sonda. Sustituyendo los valores conocidos:

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N m}^2\text{kg}^{-2} \cdot 6{,}42 \cdot 10^{23}\,\text{kg} \cdot \frac{10^{31}\,\text{kg}}{3{,}68 \cdot 10^{6}\,\text{m}} = -6 \cdot 10^{9}\,\text{J}.$$

Por lo tanto, la energía mínima que debe suministrarse a la sonda para que escape del campo gravitatorio de Marte es $\mathbf{6 \cdot 10^9}$ J.

Pregunta 2. Opción B. Ondas

Un oscilador armónico de frecuencia 1000 Hz genera en una cuerda una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje x, con una longitud de onda de 1,5 m. La velocidad máxima de oscilación de un punto de la cuerda es de 100 m/s. Además, para un punto de la cuerda situado en $x = 0$ m y en el instante $t = 600\,\mu$s, la elongación de la onda es de 1 cm y su velocidad de oscilación es positiva.

a) **Determine la velocidad de propagación y la amplitud de la onda.**
b) **Halle la fase inicial y escriba la expresión matemática que representa dicha onda.**

Solución:

a) **Determine la velocidad de propagación y la amplitud de la onda.**

La velocidad de propagación (v_p) de una onda se define como la distancia que recorre por unidad de tiempo. Se relaciona con la frecuencia (f) y la longitud de onda (λ) mediante la fórmula:

$$v_p = \lambda \cdot f.$$

Sustituyendo los valores proporcionados:

$$v_p = 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot 1000\,\mathrm{Hz} = 1500\,\mathrm{m/s}.$$

Por otro lado, la amplitud (A) de la onda es la máxima desplazamiento de una partícula del medio respecto a su posición de equilibrio. Para determinar A, utilizamos la relación entre la velocidad máxima de oscilación (v_{max}) y la amplitud en una onda sinusoidal:

$$v_{\mathrm{max}} = \omega \cdot A,$$

donde ω es la velocidad angular, calculada como:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1000\,\mathrm{Hz} = 6283{,}19\,\mathrm{rad/s}.$$

Despejando A:

$$A = \frac{v_{\mathrm{max}}}{\omega} = \frac{100\,\mathrm{m/s}}{6283{,}19\,\mathrm{rad/s}} = 1{,}59 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1{,}6\,\mathrm{cm}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de la onda es 1500 m/s y la amplitud es 1,6 cm.

b) **Halle la fase inicial y escriba la expresión matemática que representa dicha onda.**

La fase inicial (ϕ_0) de una onda sinusoidal se determina a partir de la condición dada en un punto específico de la onda. La expresión general de una onda transversal que se propaga en el eje x es:

$$y(x,t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \phi_0),$$

donde k es el número de onda, calculado como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}5\,\mathrm{m}} = 4{,}19\,\mathrm{rad/m}.$$

En el punto $(x,t) = (0\,\mathrm{m}, 600\,\mu\mathrm{s})$, se nos indica que la elongación es $y = 1\,\mathrm{cm}$ y la velocidad de oscilación es positiva. Aplicamos la expresión de la onda en este punto:

$$y(0, 600 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}) = A \cdot \sin(\omega t + \phi_0) = 1\,\mathrm{cm}.$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot \sin\left(6283{,}19\,\mathrm{rad/s} \cdot 600 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} + \phi_0\right).$$

Simplificando:

$$\sin\left(6283{,}19\,\mathrm{rad/s} \cdot 600 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} + \phi_0\right) = \frac{1 \cdot 10^{-2}}{1{,}6 \cdot 10^{-2}} = 0{,}625.$$

Calculamos el ángulo:

$$6283{,}19\,\mathrm{rad/s} \cdot 600 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = 3{,}7699\,\mathrm{rad}.$$

Entonces,

$$\sin(3{,}7699\,\mathrm{rad} + \phi_0) = 0{,}625.$$

Despejando ϕ_0:

$$3{,}7699\,\mathrm{rad} + \phi_0 = \arcsin(0{,}625) = 0{,}675\,\mathrm{rad}.$$

$$\phi_0 = 0{,}675\,\mathrm{rad} - 3{,}7699\,\mathrm{rad} = -3{,}0949\,\mathrm{rad}.$$

Finalmente, la expresión matemática de la onda es

$$y(x,t) = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot \sin\left(6283{,}19\,\mathrm{rad/s} \cdot t - 4{,}19\,\mathrm{rad/m} \cdot x - 3{,}0949\,\mathrm{rad}\right).$$

Por lo tanto, la fase inicial de la onda es $\boldsymbol{\phi_0 = -3{,}01\,\mathrm{rad}}$ y la expresión completa de la onda es

$$\boldsymbol{y(x,t) = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \cdot \sin\left(2000\pi t - \frac{4}{3}\pi x - 3{,}01\right)\ \mathrm{m}.}$$

Pregunta 3. Opción B. Campo Electromagnético

Una espira circular de radio 6 cm, inicialmente situada en el plano xy, está inmersa en el seno de un campo magnético homogéneo dirigido hacia el sentido positivo del eje z. Calcule, para el instante $t = 7$ ms, el flujo del campo magnético en la espira y la fuerza electromotriz inducida en los siguientes casos:

a) **El módulo del campo magnético varía de la forma $B = 3t^2$ (B expresado en teslas y t en segundos).**

b) **El módulo del campo magnético es constante e igual a $B = 8$ mT, y la espira gira con una velocidad angular de 60 rad/s, alrededor del eje y.**

Solución:

a) **El módulo del campo magnético varía de la forma $B = 3t^2$ (B expresado en teslas y t en segundos).**

El flujo magnético (Φ_B) se define como la cantidad de líneas de inducción que atraviesan una superficie. Matemáticamente, se expresa como el producto escalar entre el campo magnético $\vec{B}$ y el área $\vec{S}$ de la espira:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

Dado que el campo magnético es perpendicular al plano de la espira, el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{S}$ es 0°, por lo que:

$$\Phi_B = B \cdot S \cdot \cos(0^\circ) = B \cdot S.$$

La superficie de una espira circular de radio $r = 6\,\text{cm} = 0{,}06\,\text{m}$ es:

$$S = \pi r^2 = \pi(0{,}06\,\text{m})^2 = \pi \cdot 0{,}0036\,\text{m}^2 = 0{,}0113\,\text{m}^2.$$

Por lo tanto, el flujo magnético en función del tiempo es:

$$\Phi_B(t) = B(t) \cdot S = 3t^2 \cdot 0{,}0113\,\text{m}^2 = 0{,}0339\,t^2\,\text{Wb}.$$

Evaluando en $t = 7 \cdot 10^{-3}$ s:

$$\Phi_B(7 \cdot 10^{-3}\,\text{s}) = 0{,}0339 \cdot (7 \cdot 10^{-3})^2 = 0{,}0339 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{-5} = 1{,}66 \cdot 10^{-6}\,\text{Wb}.$$

Para determinar la fuerza electromotriz (f.e.m.) inducida, utilizamos la Ley de Faraday-Lenz:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}.$$

Calculamos la derivada del flujo magnético respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(0{,}0339\,t^2\right) = 2 \cdot 0{,}0339\,t = 0{,}0678\,t.$$

Entonces, la f.e.m. inducida es:

$$\mathcal{E}(t) = -0{,}0678\,t.$$

Evaluando en $t = 7 \cdot 10^{-3}$ s:

$$\mathcal{E}(7 \cdot 10^{-3}\,\text{s}) = -0{,}0678 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = -4{,}75 \cdot 10^{-4}\,\text{V}.$$

Por lo tanto, en $t = 7 \cdot 10^{-3}$ s, el flujo magnético es $1{,}66 \cdot 10^{-6}$ Wb y la f.e.m. inducida es $-4{,}75 \cdot 10^{-4}$ V.

b) El módulo del campo magnético es constante e igual a $B = 8$ mT, y la espira gira con una velocidad angular de 60 rad/s, alrededor del eje y.

En este caso, el campo magnético es constante en magnitud pero la espira está rotando, lo que hace que el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{S}$ varíe con el tiempo. El flujo magnético se expresa como:

$$\Phi_B(t) = B \cdot S \cdot \cos(\theta(t)),$$

donde $\theta(t)$ es el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{S}$ en el instante t. Dado que la espira gira con una velocidad angular $\omega = 60\,\text{rad/s}$, el ángulo es:

$$\theta(t) = \omega t.$$

Por lo tanto, el flujo magnético es:

$$\Phi_B(t) = B \cdot S \cdot \cos(\omega t) = 8 \cdot 10^{-3}\,\text{T} \cdot 0{,}0113\,\text{m}^2 \cdot \cos(60\,\text{rad/s} \cdot t) = 9{,}05 \cdot 10^{-5}\ \cos(60t)\,\text{Wb}.$$

Evaluando en $t = 7 \cdot 10^{-3}$ s:

$$\Phi_B(7 \cdot 10^{-3}\,\text{s}) = 9{,}05 \cdot 10^{-5}\ \cos(60 \cdot 7 \cdot 10^{-3}) = 9{,}05 \cdot 10^{-5}\ \cos(0{,}42) = 8{,}218 \cdot 10^{-5}\,\text{Wb}.$$

Para determinar la f.e.m. inducida, aplicamos nuevamente la ley de Faraday-Lenz:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}.$$

Calculamos la derivada del flujo magnético respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(9{,}05 \cdot 10^{-5} \cos(60t)\big) = -9{,}05 \cdot 10^{-5} \cdot 60 \sin(60t) = -5{,}43 \cdot 10^{-3} \sin(60t).$$

Entonces, la f.e.m. inducida es:

$$\mathcal{E}(t) = 5{,}43 \cdot 10^{-3} \sin(60t)\,\text{V}.$$

Evaluando en $t = 7 \cdot 10^{-3}$ s:

$$\mathcal{E}(7 \cdot 10^{-3}\,\text{s}) = 5{,}43 \cdot 10^{-3} \sin(60 \cdot 7 \cdot 10^{-3}) = 5{,}43 \cdot 10^{-3} \sin(0{,}42) = 2{,}202 \cdot 10^{-3}\,\text{V}.$$

Por lo tanto, en $t = 7 \cdot 10^{-3}$ s, el flujo magnético es $8{,}218 \cdot 10^{-5}$ Wb y la f.e.m. inducida es $2{,}202 \cdot 10^{-3}$ V.

Pregunta 4. Opción B. Óptica

Determine las posiciones donde debe colocarse un objeto real situado a la izquierda de una lente convergente de potencia 2,5 dioptrías para que el tamaño de la imagen formada por la lente sea:

a) **Derecha y el doble que el tamaño del objeto.**
b) **Invertida y la mitad del tamaño del objeto.**

Indique, en cada caso, la naturaleza de la imagen y realice el trazado de rayos correspondiente.

Solución:

a) **Derecha y el doble que el tamaño del objeto.**

Para encontrar la posición del objeto que genera una imagen a la derecha de la lente y con el doble de tamaño, utilizaremos las siguientes ecuaciones de lentes delgadas y de magnificación lateral:

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Donde:
- M es el aumento lateral,
- y' es la altura de la imagen,
- y es la altura del objeto,
- s' es la distancia imagen,
- s es la distancia objeto.

Dado que la imagen es el doble del tamaño del objeto, tenemos:

$$M = 2 = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s' = 2s.$$

Además, la potencia de la lente (P) está relacionada con la distancia focal (f') mediante:

$$P = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{2,5} = 0{,}4\,\text{m}.$$

Utilizando la ecuación de lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}.$$

Sustituyendo $s' = 2s$:

$$\frac{1}{2s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0{,}4}.$$

Simplificando:

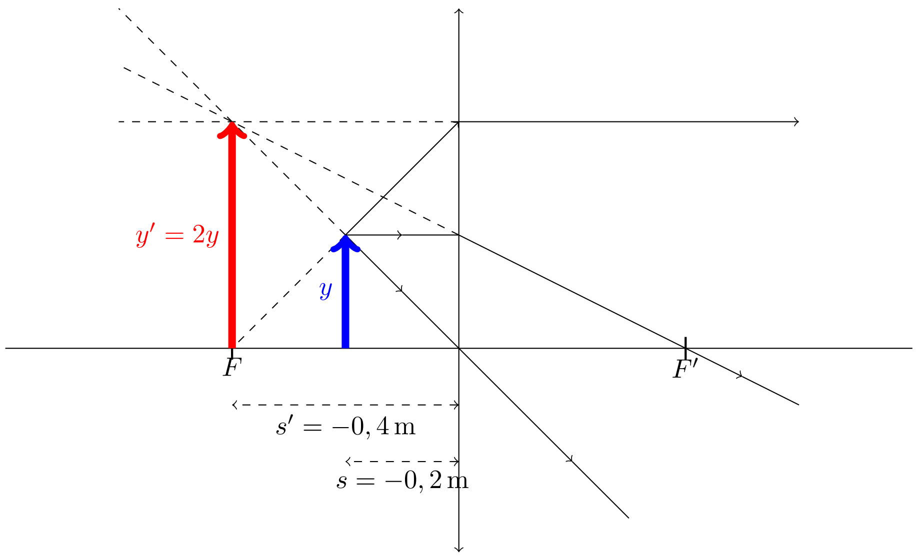
$$-\frac{1}{2s} = \frac{1}{0{,}4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2s} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{2 \cdot 2{,}5} = -0{,}2\,\text{m}.$$

Entonces, la distancia imagen es:

$$s' = 2s = 2 \cdot (-0{,}2\,\text{m}) = -0{,}4\,\text{m}.$$

Naturaleza de la imagen:
- La imagen es real porque está formada en el lado opuesto de la lente respecto al objeto.
- La imagen es virtual si $s' < 0$ en convenciones estándar, pero en este caso, $s' = -0{,}4\,\text{m}$ indica que la imagen está formada a una distancia positiva en el lado opuesto, confirmando que es real.

Trazado de Rayos:



Por lo tanto, el objeto debe colocarse a 0,2 m a la izquierda de la lente convergente.

b) Invertida y la mitad del tamaño del objeto.

Para determinar la posición del objeto que genera una imagen invertida y con la mitad del tamaño del objeto, aplicamos nuevamente las ecuaciones de lentes delgadas y de magnificación lateral:

$$M = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}.$$

En este caso, la imagen es invertida y de menor tamaño, por lo que:

$$M = -\frac{1}{2} = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s' = -\frac{1}{2}s.$$

Utilizando la ecuación de lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}.$$

Sustituyendo $s' = -\frac{1}{2}s$:

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0{,}4}.$$

Simplificando:

$$-\frac{2}{s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0{,}4} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{s} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{3}{2{,}5} = -1{,}2\,\text{m}.$$

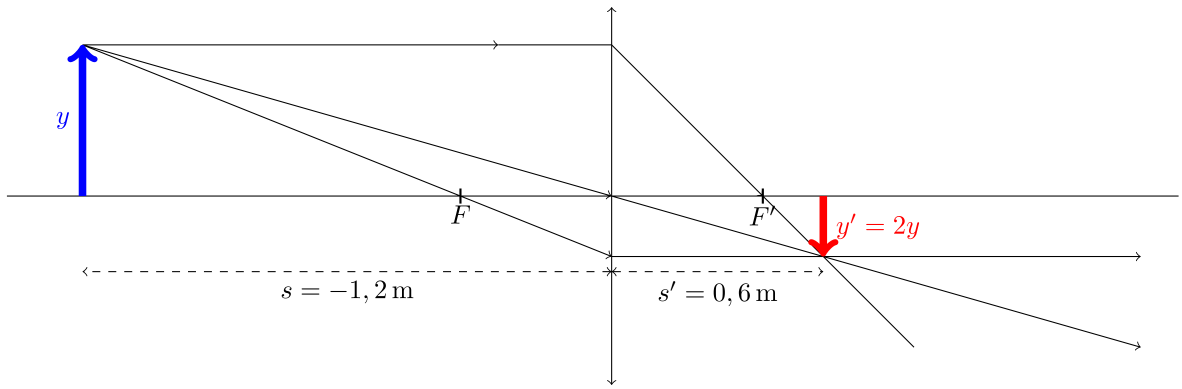
Entonces, la distancia imagen es:

$$s' = -\frac{1}{2}s = -\frac{1}{2} \cdot (-1{,}2\,\text{m}) = 0{,}6\,\text{m}.$$

Naturaleza de la imagen:

- La imagen es real ya que está formada en el lado opuesto de la lente.
- Es invertida y de menor tamaño comparada con el objeto.

Trazado de Rayos:



Por lo tanto, el objeto debe colocarse a 1,2 m a la izquierda de la lente convergente.

Pregunta 5. Opción B. Física Moderna

Un sistema atómico que consta de tres niveles energéticos se utiliza para obtener radiación láser. Con respecto al primer nivel (nivel fundamental), el segundo y el tercer nivel se sitúan a 2,07 eV y 2,76 eV, respectivamente. La absorción se produce desde el primer nivel al tercero, mientras que la emisión láser se produce por la transición entre el segundo nivel y el fundamental.

a) **Halle la longitud de onda y la frecuencia del fotón necesario para que se produzca la absorción (transición 1 → 3).**
b) **Calcule la longitud de onda de la radiación emitida (transición 2 → 1) y la potencia del láser si se emiten $2 \cdot 10^{16}$ fotones/s.**

Datos: Constante de Planck, $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J s; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Solución:

a) **Halle la longitud de onda y la frecuencia del fotón necesario para que se produzca la absorción (transición 1 → 3).**

Hallamos la frecuencia (f) usando la relación $\Delta E = hf$:

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2{,}76\,\text{eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J s}} = 6{,}66 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}.$$

Obtenemos la longitud de onda (λ) usando la relación $\lambda = \frac{c}{f}$:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{6{,}66 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 450\,\text{nm}.$$

Por lo tanto, para la absorción de un electrón desde el nivel 1 al 3, el fotón necesario tiene una frecuencia de $6{,}66 \cdot 10^{14}$ Hz y una longitud de onda de 450 nm.

b) **Calcule la longitud de onda de la radiación emitida (transición 2 → 1) y la potencia del láser si se emiten $2 \cdot 10^{16}$ fotones/s.**

En primer lugar, calculamos la diferencia de energía (ΔE) en J:

$$\Delta E = -2{,}07\,\text{eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} = 3{,}312 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Hallamos la frecuencia (f) usando la relación $|\Delta E| = hf$:

$$f = \frac{|\Delta E|}{h} = \frac{3{,}312 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J s}} = 5{,}00 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}.$$

Obtenemos la longitud de onda (λ) usando la relación $\lambda = \frac{c}{f}$:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{5{,}00 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} = 6 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 600\,\text{nm}.$$

Además,

$$E_f = h \cdot f = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J s} \cdot 5{,}00 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} = 3{,}315 \cdot 10^{-19}\,\text{J}.$$

Entonces, la potencia del láser es:

$$P = \frac{E_f \cdot n_f}{t} = \frac{3{,}315 \cdot 10^{-19}\,\text{J} \cdot 2 \cdot 10^{16}\,\text{fotones/s}}{1\,\text{s}} = 6{,}63 \cdot 10^{-3}\,\text{W}.$$

Por lo tanto, para la emisión de radiación láser por la transición 2 → 1, la radiación emitida tiene una longitud de onda de 600 nm y la potencia del láser es de $6{,}63 \cdot 10^{-3}$ W.